Résumé 13 : Suites et séries de fonctions

$\mathbb{K}$ sera le corps des réels ou des complexes, E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, dont les normes seront notées $\|.\|$.

I sera une partie non vide de E (mais dans la pratique quasiment toujours un intervalle réel). Pour toute fonction bornée $f : I \to F$, nous noterons

$$\|f\|_{\infty,I} = \sup_{x\in I} \|f(x)\| \text{ la norme infinie de } f \text{ sur } I.$$

On l'appelle aussi norme uniforme sur I. C'est bien évidemment une norme sur $\mathscr{B}(I, F)$.

I Modes de convergence

§ 1. ***Pour les suites de fonctions.***— On se donne ici pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction $f_n : I \to F$, et $f : I \to F$.

- On dit que (f_n) **converge simplement** vers f sur I lorsque pour tout $x \in I$, la suite $\big(f_n(x)\big)_n$ converge vers $f(x)$. La fonction f est alors dite limite simple de la suite (f_n).

  Exemples :

  - $x \longmapsto x \sin \dfrac{x}{n}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$.
  - $x \longmapsto (n+1)x^n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1[$ mais ne ne converge simplement simplement en aucun point de $[1, 2]$.

  Cette notion est souvent insuffisante car une limite simple de fonctions continues ne l'est pas (contrairement à ce qu'avait dans un premier temps cru Cauchy). En 1841, Weierstrass, introduit la définition suivante
- On dit que (f_n) **converge uniformément** vers f sur I lorsque la fonction $(f - f_n)_n$ est bornée à partir d'un certain rang et que $\|f - f_n\|_{\infty,I} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  La fonction f est alors dite limite uniforme de la suite (f_n).
- On dit que (f_n) **converge uniformément sur tous compacts de** I vers f lorsque pour tout tout compact $K \subset I$, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur K. Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on parlera de convergence uniforme sur tous les segments $[a, b] \subset I$.
- **Protocole d'étude de la convergence uniforme :** On commence par chercher la limite simple f, qui est la seule limite uniforme potentielle. Puis, soit on majore $\|f(x) - f_n(x)\|$ par une quantité α_n indépendante de x qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$, soit (lorsque $F = \mathbb{R}$) on étudie les variations de $x \mapsto f(x) - f_n(x) \in \mathbb{R}$ pour déterminer sa borne supérieure sur I. Cette deuxième méthode aura l'avantage sur la première de prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme (lorsque c'est le cas).

Remarques :

1. (f_n) converge simplement sur I vers f lorsque
$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \Big(n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon\Big).$$
Et (f_n) converge uniformément sur I vers f lorsque
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \Big(n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon\Big).$$
Ainsi, la différence entre ces deux définitions est que dans le cas de la convergence uniforme le rang n_0 est indépendant de x.
2. L'intérêt principal de la limite simple est qu'elle est plus facile à établir que la convergence uniforme, et que si (f_n) converge uniformément sur I vers f, alors (f_n) converge simplement sur I vers f.

§ 2. ***Pour les séries de Fonctions.***— On se donne à nouveau pour tout $n \in \mathbb{N}$ une fonction $f_n : I \to F$. Nous noterons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$. De plus, pour $x \in I$, lorsque la série $(\sum f_k(x))$ converge, nous noterons $S(x)$ sa limite, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$.

- On dit que la série de fonctions $(\sum f_n)$ **converge simplement** sur I lorsque la suite de fonctions $(S_n(x))_n$ converge simplement sur I.
  La fonction S est alors la limite simple de la série $(\sum f_n)$, et I est l'ensemble de définition de S.
- On dit que $(\sum f_n)$ **converge uniformément** sur I lorsque la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur I.
  La fonction S est alors la limite uniforme de la série $(\sum f_n)$.

Proposition I.1

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si

(i) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I, et

(ii) La suite des restes $\big(R_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I, i.e $\displaystyle\sup_{x\in I} |R_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- On dit que $(\sum f_n)$ **converge normalement** sur I lorsque la suite numérique $(\sum \|f_n\|_{\infty,I})_n$ converge .

EXEMPLES :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\arctan\frac{x}{n}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$ mais sur $[-a,a]$.
3. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x}$ ne converge pas normalement sur $]1,+\infty[$ mais sur $[a,+\infty[$, et ce pour tout $a>1$.

- **CVN $\Longrightarrow$ CVU :** Si $(\sum f_n)$ converge normalement sur I, elle converge uniformément sur I.

REMARQUES :

1. La convergence normale est plus simple à établir que la convergence uniforme pour une série de fonctions (pour les suites de fonctions, cela ne se pose évidemment pas) car on est confronté à une série numérique à termes positifs. Cela nécessite par contre que la série $\sum|f_n(x)|$ converge simplement. Elle ne s'appliquera pas à des séries du type $\sum\frac{(-1)^n}{n+x}$ par exemple, pour lesquelles il faudra recourir à la convergence uniforme. Ce qui amène à la remarque suivante...
2. *METHODE D'ETUDE DE $\sum f_k$:*
   - Recherche du plus grand ensemble sur lequel on a convergence simple, i.e de $\mathscr{D}_S$.
   - Y a-t-il CVN de la série sur I ? A défaut sur tous les segments de I ? Pour cela, on estime $\|f_n\|_{\infty,I}$, ou $\|f_n\|_{\infty,[a,b]}$ pour tout $[a,b]\subset I$ en étudiant les variations de la fonction f_n, ou à défaut en majorant $|f_n(x)|$ par une quantité indépendante de x et qui est le terme général d'une série convergente.
   - S'il n'y a pas de convergence normale, on cherche à prouver la convergence uniforme en estimant $\|R_n\|_{[a,b],\infty}$. Penser aux séries géométriques, au critère de Leibniz, ou à la comparaison série-intégrale lorsque pour x, la suite $\big(f_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ décroit.

II Propriétés de la limite

Dans ce chapitre, on cherche à savoir quelles propriétés portant sur les fonctions (f_n) est encore valable pour sa limite f : continuité, dérivabilité,.... Bien souvent, la seule convergence simple s'avère insuffisante. Il est d'ailleurs important que vous reteniez les contre-exemples du cours à ce propos.

Nous reprenons les mêmes notations que dans le chapitre précédent.

§ 1. ***Continuité, caractère borné.***— La première propriété passant à la limite uniforme est le caractère borné

Proposition II.1

Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est bornée sur I, et si (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f, alors f est bornée.

Plus fondamentalement, la continuité passe à la limite uniforme, i.e que $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\left(\mathscr{B}([a,b],\mathbb{K}),\|.\|_\infty\right)$.

Théorème II.2

Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I

1. *Soit $a\in I$. Si chaque f_n est continue en a, alors f est continue en a.*
2. *Si chaque f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.*

REMARQUES :

La continuité étant une notion globale, il suffira que la convergence uniforme soit valable sur tout segment de I. Cette remarque est très importante, car on a rarement la convergence uniforme (a fortiori normale dans le cas des séries) sur tout I.

Pour une série de fonctions cela fonctionne aussi.

Théorème II.3 (*Le même pour les séries*)

Soit $f_n\in\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$ une suite de fonctions continues telle que $\sum f_n$ converge uniformément sur I. Alors, leur somme S est continue sur I.

Exercices :

1. Montrer que la fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et que $\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ l'est sur $]1, +\infty[$.
2. Grâce au critère de Leibniz, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

§ 2. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{f_n}(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty} \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f_n}(\mathbf{x})$.— A utiliser principalement lorsque a est une extrêmité de l'intervalle I.

Théorème II.4 (*Double limite*)

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans F convergeant uniformément vers f sur I, et soit a un point adhérent à I. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a, alors

- *La suite $(\ell_n)_n$ converge vers un vecteur $\ell \in F$.*
- *$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.*

Remarques :

Dans le cas où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$.

- Si $I = [\alpha, +\infty[$, si (f_n) converge uniformément sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell_n \in \mathbb{C}$, alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n$.
- De même en $-\infty$.

Théorème II.5 (*Double limite pour les séries*)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans F convergeant uniformément sur I, et soit a un point adhérent à I. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a, alors

- *La série $\sum \ell_n$ converge.*
- *$S(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.*

Exemples :

- $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
- Un cas d'école de limite infinie : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ est définie sur $]0, +\infty[$. On montre de deux manières que sa limite en 0^+ est infinie.
- Un autre : la fonction ζ en 1. on prouve avec une comparaison à une intégrale qu'elle est équivalente à $\frac{1}{x-1}$.

§ 3. ***Intégration et primitivation d'une limite uniforme.***— Rappelons à ce propos que

$$\text{Pour toute } f \in \mathscr{C}_m^0([a,b],\mathbb{C}), \qquad \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \|f\|_1 \leqslant (b-a)\|f\|_\infty.$$

Théorème II.6 (*Intégration d'une limite uniforme sur un segment*)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans F. a un point de I. On suppose que f_n converge uniformément sur tout segment de I vers f, et on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$.
Alors F_n converge uniformément vers F sur tout segment de I.

En particulier, pour tout $[a,b] \subset I$, $\displaystyle\int_a^b f_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)dt$.

Remarques :

- On peut affaiblir l'hypothèse : la conclusion demeure si on ne suppose que la convergence pour la norme L_1. Il faut alors ajouter la continuité de f dans les hypothèses.
- C'est le deuxième théorème d'intervertion intégrale-limite, après le théorème de convergence dominée. Ce dernier est bien plus efficace, mais ne nous fournit pas la convergence uniforme des primitives sur tout segment. En revanche, le théorème que l'on vient d'établir est complètement muet sur toute intégrale sur un intervalle non borné.

§ 4. ***Dérivabilité.***— Dans ce paragraphe, I est une partie de $\mathbb{R}$. La convergence uniforme est insuffisante pour garantir la dérivabilité de la limite, et donc a fortiori pour ecrire que la dérivée de la limite est la limite de la dérivée, comme le prouve l'exemple de $x \longmapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ qui converge uniformément vers $x \longmapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème II.7 (*Dérivation de la limite*)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}^1(I,F)$ et $f, g : I \to F$.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} (f_n) \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } f, \text{ et} \\ f'_n \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \text{ vers } g, \end{cases}$$

$$\text{alors} \quad \begin{cases} (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur tout segment de } I, \text{ et} \\ f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ et } f' = g. \end{cases}$$

On peut étendre ce résultat aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

Théorème II.8 (*Classe $\mathscr{C}^k$ de la limite*)

Soit $k \geqslant 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}^k(I,F)$. Enfin, soient aussi $g_0, g_1, \dots g_k : I \to F$.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall j \in [\![0, k-1]\!], (f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } I \text{ vers } g_j, \text{ et} \\ \left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \text{ vers } g_k, \end{cases}$$

$$\text{alors} \quad \begin{cases} (f_n) \text{ converge uniformément vers } g_0 \text{ sur tout segment de } I, \text{ et} \\ g_0 \text{ est de classe } \mathscr{C}^k \text{ et pour tout } j \in [\![1,k]\!], g_0^{(j)} = g_j. \end{cases}$$

Et les décliner au cas des séries :

Théorème II.9 (*Dérivation de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$*)

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}^1(I,F)$.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge simplement sur } I, \text{ et} \\ \sum_{n\geqslant 1} f'_n \text{ converge uniformément sur tout segment de } I, \end{cases}$$

$$\text{alors} \quad \begin{cases} \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge uniformément sur tout segment de } I, \text{ et} \\ f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ et } f' : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x). \end{cases}$$

Evidemment, dans ce cas, on commencera par regarder si la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} f'_n$ est normale sur tout segment de I, condition impliquant la deuxième hypothèse.

III Densité d'espaces de fonctions

§ 1. ***Théorème d'approximation de Weierstrass.***— Ce théorème est central en analyse. Il fournit un statut particulier aux fonctions polynômiales, dans le sens où toute propriété vraie sur les polynômes et conservée par passage à la limite uniforme sera vraie pour toute fonction continue.

Théorème III.1

Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, il existe une suite de polynomes P_n telle que $\|f - P_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarques :

1. Pourquoi, si f n'est pas elle-même un polynome, peut-on dire que les degrés des P_n ne sont pas bornés ?
2. Une autre manière de l'énoncer est de dire que le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}$ de $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions polynomiales est dense dans $\left(\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K}), \|.\|_\infty\right)$.
3. En corollaire, toute fonction continue est limite uniforme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.
4. Quelles sont les fonctions f continues sur $[0,1]$ telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

§ 2. ***Densité des fonctions en escalier.***— Les fonctions polynomiales ne sont pas denses dans $\mathscr{C}_m^0$ puisque la continuité passe à la limite uniforme. En revanche,

Théorème III.2

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme de fonctions en escaliers sur $[a,b]$. Autrement dit, $\mathscr{E}$ est dense dans $\mathscr{C}_m^0$.

ANNEXE

EXERCICES :

CCP 11

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

EXERCICES :

CCP 12

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

EXERCICES :

CCP 16 On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.
2. Calculez $S'(1)$.

EXERCICES :

CCP 15 Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
3. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
4. La série de fonctions $\displaystyle\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?